العنوان:	شروط تقارب توزيع حجم المجتمع في العمليات المتفرعة متعددة الانواع
المصدر:	المجلة العراقية للعلوم الإحصائية
الناشر:	جامعة الموصل - كلية علوم الحاسوب والرياضيات
المؤلف الرئيسي:	عبدالفتاح، قبيس سعيد
مؤلفين آخرين:	حمدون، صبحي حمادي(م. مشارك)
المجلد/العدد:	ع4
محكمة:	نعم
التاريخ الميلادي:	2002
الشهر:	كانون الأول
الصفحات:	1 - 12
رقم MD:	866433
نوع المحتوى:	بحوث ومقالات
قواعد المعلومات:	EcoLink
مواضيع:	الإحصاء التحليلي
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/866433

المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (4) 2002
ص ص [1-12]

شروط تقارب توزيع حجم المجتمع في العمليات المتفرعة متعددة الانواع

أ. د. قبيس سعيد عبدالفتاح*   صبحي حمادي حمدون**

الملخص

إن مشكلة تقارب توزيع حجم المجتمع في العمليات المتفرعة متعددة الأنواع عندما يكون قيمة الجذر المميز (ρ) لمصفوفة معدلات التكاثر قريبة من الواحد كانت موضوعا للكثير من الدراسات منها [Quine, 1972] , [Fahady, 1972] الذي حدد شروط لتحقيق هذا التقارب تستلزم محدودية العزوم الثلاثة الأولى وهي شروط معقدة ومشكوك في تحقيقها. كما بذلت جهود سابقة [البكر،1996] لتبسيط هذه الشروط ومحاولة الاستغناء عن العزم الثالث إلا أن هذا الجهد لم يكلل بالنجاح لعدم إسناده بحل رياضي مقبول. لذا تناول هذا البحث مدى تحقق شرط محدودية العزم الثالث عندما تقترب قيمة (ρ) من الواحد اذ تبين بان افتراض محدودية هذا العزم هو افتراض غير واقعي للكثير من الحالات وخاصة بالنسبة للعمليات ذات النوعين كما تناول البحث إمكانية الاعتماد على محدودية العزمين الأول والثاني لتحقيق التقارب وقد اثبت ذلك من خلال دراسة تجريبية أعدت لهذا الغرض.

Asymptotic Behavior conditions for the Probability Distribution of Population Size in the Multiple Branching Processes

ABSTRACT

The problem of asymptotic behavior of the probability distribution of population size in the multiple branching processes, when the value of the largest characteristic root (ρ) of the offspring probability matrix, has been the subject of a number of studies such as [Fahady, 1972], [Quine, 1972], where it has been found that this behavior is achieved by assuming complex conditions which required delimiting the first three moments. Attempt have also been made [Al-baker, 1996] to simplify these conditions and eliminate the third moment, but he not award due to lake of a reasonable mathematical solution. Therefore the present study deals with the development of the value of the third moment when the value of (ρ) approach to one. Further, it shows that assuming the delimitation of this moment is not applicable in most of the cases, especially in the use of binary type. The study also investigate the

* أستاذ/ رئيس جامعة تكريت.
** أستاذ مساعد/ رئيس قسم علوم الحاسبات/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل.

possibility of depending on the delimitation of the first two moments only, to achieve the convergent, and this has been validated through an experimental study prepared for this purpose.

المقدمة

يتناول البحث دراسة الشروط الواجب توفرها لتحقيق التقارب للتوزيع الاحتمالي لحجم العملية المتفرعة متعددة الانواع في حالة كون قيمة الجذر المميز لمصفوفة معدلات التكاثر قريبة من الواحد، إن تعميم المتسلسلة المتفرعة البسيطة الى الحالة التي يكون فيها افراد المجتمع لها عدد محدود من الانواع المختلفة، يطلق عليها المتسلسلات المتفرعة متعددة الأنواع ولقد استخدم [Mode 1971] هذا النموذج وتم تطبيقه في العديد من المجالات المختلفة.ولوصف هذا النموذج نفرض ان افراد المجتمع والذي يفترض انها تولدت من جد واحد لها k من الانواع المختلفة ولتكن :

$\{p_i(j): j=(j_1,j_2,\ldots, j_k), \quad j_r=0,1,2,\ldots ; \; r=1,2,\ldots k\}$

هي احتمالية ان يكون للعنصر من النوع i ، j_1 من الذريات من النوع الاول j_2 من الذريات من النوع الثاني،.... j_k من الذريات من النوع k فان الدالة المولدة للاحتمالات للنوع i في الجيل n تعرف بالشكل الاتي: [Giamp *et al.*,1985]

$f_i(S)=\Sigma p_i(j)S^{j1}\ldots S^{jk}$

وعلى فرض ان ولادات الأفراد كافة مستقلة عن بعضها وعن ولادات الأجيال السابقة، ليكن Z_{ni} يمثل عدد عناصر النوع i في الجيل n فان المتجه

$Z_n=(Z_{n1}, Z_{n2}, \ldots Z_{nk})$

سيمثل حجم المجتمع في الجيل n وللأنواع كافة وان حجم المجتمع في الجيل $n+1$ يمكن إيجاده من علاقة التكرار الاتية: [Goldstein & Hoppe,1978]

$$Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{Z_{ni}}X_{n,r}^{(i)}$$

حيث انَّ:

$$\left\{X_{n,r}^{(i)} : r=1,2,\ldots \; ; n=0,1,2, \; ; i=1,2,\ldots k\right\}$$

هو متجه عشوائي مستقل وان $X_{n,r}^{(i)}$ له الاحتمالية $p_i(.)$.

ولهذا فان $\{Z_n\}_0^{\infty}$ يشكل سلسلة ماركوف بحالات فضاء ذات k من الأبعاد من الأعداد غير السالبة . ان الحالة $(0,0,\ldots,0)$ هي حالة انقراض المتسلسلة وان حجم المجتمع في الأمد البعيد إما ان يؤول إلى الصفر ويتلاشى أو يؤدي إلى حالة الانفجار. أن قيمة الجذر المميز لمصفوفة التكاثر (eigenvalue) لها نفس الأهمية لمعدل التكاثر في المتسلسلات

البسيطة. لتكن $M=((\mu_{ij}))$ تمثل مصفوفة معدلات التكاثر في المتسلسلات المتفرعة متعددة الأنواع حيث أنّ:

$$\{\mu_{ij}=E(Z_{1j}|Z_0=e_i)\ =\frac{\partial f^{i}(1,1,1,\ldots,1)}{\partial S_j}\ ;\ i,j=1,2,\ldots k\ ;\qquad 1\leq i,j\leq k\}$$

وان e_i هو متجه جميع حدوده مساوية للصفر عدا المكون i حيث ان قيمته تساوي 1 والذي يمثل النوع الذي تبدأ منه المتسلسلة

$e_i=(0,0,\ldots\ldots,1,0,0,\ldots\ldots\ldots 0)$

وبافتراض ان $\{Z_n\}_0^{\infty}$ غير قابلة للتجزئة (irreducible) (أي انها تمثل مجموعة مغلقة واحدة) وبعبارة أخرى فانه لأي عدد n_{ij} فان $M_{ij}^{(n_{ij})}>0$ حيث $M_{ij}^{(r)}$ هو العنصر (i,j) من المصفوفة M مرفوعة للاس r.وكذلك فان M لها اكبر جذر مميز ρ وتمتاز هذه المصفوفة بما يأتي:

1- أنها مصفوفة موجبة دائما

2- لها خاصية الضرب الجبري والهندسي

3- تسمح بانتظام للمتجهين المميزين القياسيين (الأيسر والأيمن) **u, v** ان يحققا العلاقات :

$$u`M=\rho u`\qquad ,Mv=\rho v\qquad u.v=1\qquad u.1=1$$

حيث **1** هو متجه جميع عناصره مساوية للواحد $(1,1,1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$ [Kesten & Stigum, 1966]

4- لجميع القيم المميزة الأخرى لـــ M فان ρ هو اكبر جذر مميز أي ان

$\rho<|\lambda|$

لتكن

$$q_i=p(Z_n=0\quad n\geq 1|\,Z_0=e_i)$$

تمثل احتمالية انقراض المتسلسلة التي تبدأ من جد اعلى ومن نوع i.

ولمتجه الاعداد الخطية $S=(S_1,S_2,\ldots\ldots\ldots\ldots S_k)$ فان

$$f_i(S)=E(S^{Z_1}|Z_0=e_i)$$

حيث

$$0\leq S_j\leq 1\qquad ;\qquad j=1,2,\ldots\ldots k$$

وان:

$$S^{Z_1}=\prod_{j=1}^{k}S_j^{Z_{1j}}$$

$$f_n^i(S)=f^i(f_{n-1}^1(S)f_{n-1}^2(S)\ldots\ldots\ldots f_{n-1}^k(S)$$

$$f_0^i(S)=S_k$$

وايضا

$$f(S)=(f_1(S),f_2(S),\dots\dots\dots f_k(S))$$

وكما في المتسلسلة البسيطة فان $q=(q_1,q_2,\dots,q_k)$ هو الحـل الوحيـد للمعادلـة $q=f(q)$ وانه اصغر من أي جذر آخر ناتج من حل هذه المعادلة. اذا افترضنا ان ρ تمثل اكبر جذر مميز (Largest positive eigenvalue) فان حالة كثافة التكاثر تكون عندما ρ تكون قريبة من الواحد. تسمى المصفوفة M بالمتسلسلة المتفرعة الحرجة الثانوية عنـدما تكون $(\rho<1)$، حرجة $(\rho=1)$ او حرجة كبرى $(\rho>1)$. عندما تكون $\rho\leq 1$ فان المتسلسلة المتفرعة متعددة الأنواع سوف تنقرض باحتمال مسـاو للواحـد أي ان : $q=p(Z_n=0\ /\ Z_0=e_i)=1$. اما عندما تكون $(\rho>1)$، فان قيمة q تكون مساوية للجـذر البسـيط غيـر السالب الذي يقل عن الواحد والناتج من حل المعادلة $q=f(q)$. لمعرفة تصرف المتسلسـلة Z_n لابد ان تكون n كبيرة جدا ففي النهاية إما تؤول Z_n إلى قيمة كبيرة جدا أو تضـمحل وتنتهي (تقترب من الصفر) أي أنها في الأمد البعيد لن تبقى محدودة وموجبة. وهنا لابد من الإشارة الى اهم النظريات الأساسية في المتسلسلات المتفرعة متعددة الأنواع والتي كانـت الأساس في تطويرها.ومنها النظرية التي اثبتها [Hoppe, 1976].والتي تنص على انه اذا كانت $\{Z_n\}_0^{\infty}$ متسلسلة متفرعة ذات k من الأنواع وبمصفوفة معدلات تكـاثر $M=(\mu_{ij})$ فان $q_i<1$ لجميع قيم i إذا وفقط إذا كانـت $\rho>1$، حيـث أن ρ هـو الجـذر المميـز لـمصفوفة معدلات التكاثر M.

ان موضوع العمليات المتفرعة درسه العديد من الباحثين وان ما يعنينا في الموضوع هو دراسة تقارب توزيع حجم المجتمع في العمليات المتفرعة ، فعندما تكون العمليـة ذات نوع واحد فقد وجد [Fahady et al.,1971] ان من الممكن تحقيق التقارب في حالة كون التباين اكبر من الصفر وان العزم الثالث محدود في كل الأجيال وقد عمم هـذه النتيجـة [Quine, 1972] بالنسبة الى حالة العمليات متعددة الانواع لتكون كما يأتي:

i) $\cdot\ {}^{c}_{ij}\ a$

ii) $$\sum_{n,j,l=1}^{k} b^{i}_{jl}\geq b$$

iii) $$\sum_{n,j,l,h}^{k} C^{i}_{j,l,h}\leq c$$

الا ان هذه الشروط تبقى معقده ويصعب تحقيقها في الحياة العملية. لذا قـام [الفهـادي والبكر، 1996] بمحاولة لتخفيف تلك الشروط وقد افترضـا ان الشـرطين الاول والثـاني والخاصين بمحدودية العزم الاول والثاني كافيان لتحقيق التقارب الا ان البحـث لـم يتنـاول

تتزايد باستمرار وبشكل غير مسيطر عليه عندما تكون قيمة الجذر المميز(ρ) لمصفوفة معدلات التكاثر قريبة من الواحد وعند زيادة عدد الاجيال. وسنتناول ذلك في الجزء الثاني هذا الموضوع والذي يؤكد ان افتراض محدودية العزم الثالث هو افتراض غير واقعي ولا يتحقق في معظم التطبيقات ان لم يكن في اجمعها وان هذه النتيجة تتطلب إعادة دراسة الموضوع للتأكد من عدم الحاجة الى هذا القيد، اذ بعكسه فان كل الجهود العلمية المبذولة سابقا تكون ذات صيغ رياضية بعيدة عن الواقع وهذا ما سنتناوله في الجزء الثاني من هذا البحث، وسنركز على دراسة العمليات المتفرعة ذات النوعين كمثال للحالة العامة والتي يمكن للباحثين الآخرين تناولها لتعميم مايتوصل اليه من نتائج في هذا البحث.

اتجاه قيم العزم الثالث

في هذا المبحث تم استخدام مدخل تجريبي تطبيقي للتأكد من عدم الحاجة إلى الشروط الإضافية المفروضة على الدوال المولدة للاحتمالات عدا تلك التي تخص الجذر المميز (محدودية العزم الثاني) حيث سبق وان حاول العديد من الباحثين تحديد الشروط الواجب توافرها للوصول الى نهاية التوزيع الاحتمالي. فكانت محاولات [Quine, 1972] الذي توصل الى شروط معقدة ولم يستطع الاستغناء عن العزم الثالث، كذلك لم تنجح المحاولات التي بذلت للاكتفاء بمحدودية العزم الثاني بما فيها دراسة [البكر، 1996] ولتطبيق إمكانية الاستغناء عن العزم الثالث تم الاعتماد على المتسلسلة المتفرعة الثنائية التي لمفرداتها القابلية على التكاثر الثنائي، الثلاثي....

ان الدالة المولدة للاحتمالات لمثل هذا النوع ستأخذ الشكل الاتي:

$$f^{i}(s_1,s_2)=\sum_{j=0}^{h}\sum_{k=0}^{h}p^{i}(X_j,X_k)S_1^{j}S_2^{k} \qquad i=1,2 \quad j,k=0,1,2,\ldots\ldots\ (3)$$

وان h تمثل أقصى قابلية توليد.

واذا اخذنا قابلية التوليد الثنائي (h=2) ورمزنا لــ p^{i}_{jk} على انها احتمالية المفردة من النوع الأول ان تولد j من المفردات ومن نفس نوعها و k من مفردات النوع الثاني فان شكل مصفوفة p^1,p^2 سيكون كما ياتي:

$$p^1=\begin{bmatrix} p^1_{00} & p^1_{01} & p^1_{02}\\ p^1_{10} & p^1_{11} & p^1_{12}\\ p^1_{20} & p^1_{21} & p^1_{22}\end{bmatrix}$$

$$p^1=\begin{bmatrix} p_{00}^1 & p_{01}^1 & p_{02}^1 \\ p_{10}^1 & p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{20}^1 & p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix}$$

حيث p_{12}^1 تمثل احتمالية المفردة من النوع الاول ان تولد مفردة واحدة من نوعها ومفردتين

$$p^2=\begin{bmatrix} p_{00}^2 & p_{01}^2 & p_{02}^2 \\ p_{10}^2 & p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{20}^2 & p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

من النوع الثاني.

p_{21}^2 احتمالية المفردة من النوع الثاني ان تولد مفردتين من النوع الاول ومفردة واحدة من نوعها.

وان الدالة المولدة للاحتمال لـ (Z_1) للنوع الاول والثاني تمثل بالشكل التالي:

$$f^1(s_1,s_2)=p_{00}^1+p_{01}^1 s_2+p_{02}^1 s_2^2+p_{10}^1 s_1+p_{11}^1 s_1 s_2+p_{12}^1 s_1 s_2^2+ p_{20}^1 s_1^2+p_{21}^1 s_1^2 s_2+p_{22}^1 s_1^2 s_2^2 \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$f^2(s_1,s_2)=p_{00}^2+p_{01}^2 s_2+p_{02}^2 s_2^2+p_{10}^2 s_1+p_{11}^2 s_1 s_2+p_{12}^2 s_1 s_2^2+ p_{20}^2 s_1^2+p_{21}^2 s_1^2 s_2+p_{22}^2 s_1^2 s_2^2$$

اما الدالة المولدة للاحتمال لـ Z_n فتمثل بالشكل الاتي:

$$\begin{aligned} f_n^1(s_1,s_2)&=p_{00}^1+p_{01}^1[f_{n-1}^2(s_1,s_2)]+p_{02}^1[f_{n-1}^2(s_1,s_2)]^2+p_{10}^1[f_{n-1}^1(s_1,s_2)]+ \\ &\quad p_{11}^1[f_{n-1}^1(s_1,s_2)][f_{n-1}^2(s_1,s_2)]+p_{12}^1[f_{n-1}^1(s_1,s_2)][f_{n-1}^2(s_1,s_2)]^2+ \\ &\quad +p_{20}^1[f_{n-1}^1(s_1,s_2)]^2+p_{22}^1[f_{n-1}^1(s_1,s_2)]^2[f_{n-1}^2(s_1,s_2)]^2 \end{aligned}$$

وكذلك فان:

$$\begin{aligned} f_n^2(s_1,s_2)&=p_{00}^2+p_{01}^2[f_{n-1}^2(s_1,s_2)]+p_{02}^2[f_{n-1}^2(s_1,s_2)]^2+p_{10}^2[f_{n-1}^1(s_1,s_2)]+ \\ &\quad p_{11}^2[f_{n-1}^1(s_1,s_2)][f_{n-1}^2(s_1,s_2)]+p_{12}^2[f_{n-1}^1(s_1,s_2)][f_{n-1}^2(s_1,s_2)]^2+ \\ &\quad +p_{20}^2[f_{n-1}^1(s_1,s_2)]^2+p_{22}^2[f_{n-1}^1(s_1,s_2)]^2[f_{n-1}^2(s_1,s_2)]^2 \end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

ان الاكتفاء بأخذ قابلية التوليد الثنائي يعود الى سبب ان الحدود النهائية من الدالة المولدة للاحتمال وبازدياد الاس لكل من s_1, s_2 يقترب من الصفر، فضلا عن ان قيمة p_{ij} المقترنة بها تكون صغيرة لان من مستلزمات اقتراب ρ من الواحد هو ان تكون احتماليات الحدود الاولى اعلى من احتماليات الحدود النهائية ولهذا فان الحدود المؤثرة هي تلك التي يكون حاصل جمع اسس كل من $s_1, \ s_2$ صغيرة، ولهذا من الممكن الاكتفاء لغاية الاس الثاني او الثالث واهمال الحدود التي يزيد فيها اس كل من s_1, s_2 عن (3).

فاذا ما اخذنا حالات تجريبية مفترضة للقيم المختلفة للتوزيع الاحتمالي والتي تؤدي الى ان تكون قيمة ρ اقل بل قريبة من الواحد الصحيح في حالة التوزيع ثنائي الانشطار وبافتراض حالة النوعين فان قيم مصفوفة العزم الثالث لهذا النوع من المتسلسلات وحسب الاجيال تحسب من خلال العلاقات الاتية:

$$C_{0,0} := \frac{d^3}{ds1^3} f1(s1, s2) \qquad C_{0,1} := \frac{d^3}{ds1^3} f2(s1, s2)$$

$$C_{1,0} := \frac{d}{ds2}\frac{d^2}{ds1^2} f1(s1, s2) \qquad C_{1,1} := \frac{d}{ds2}\frac{d^2}{ds1^2} f2(s1, s2) \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$C_{2,0} := \frac{d^2}{ds2^2}\frac{d}{ds1} f1(s1, s2) \qquad C_{2,1} := \frac{d^2}{ds2^2}\frac{d}{ds1} f2(s1, s2)$$

$$C_{3,0} := \frac{d^3}{ds2^3} f1(s1, s2) \qquad C_{3,1} := \frac{d^3}{ds2^3} f2(s1, s2)$$

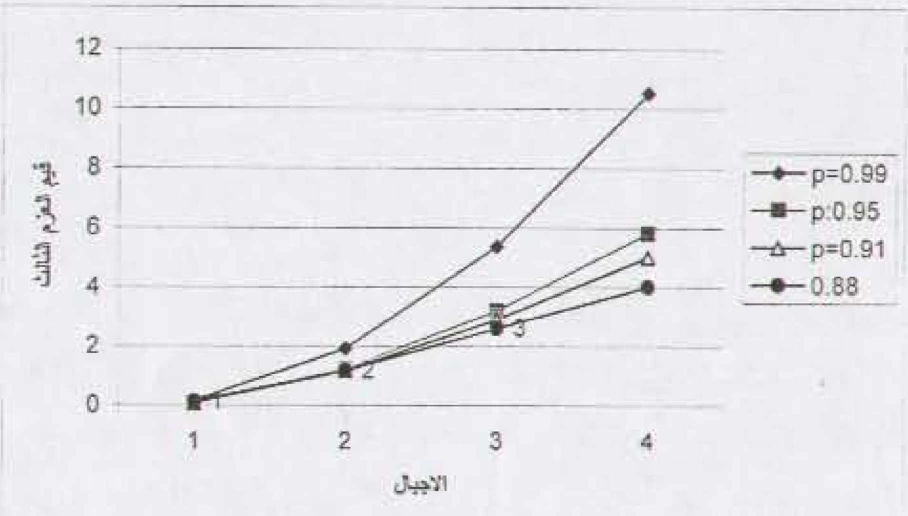
ويتم حساب مصفوفة العزم الثالث للجيل الثاني وذلك بالتعويض عن $f1(S_1, S_2)$ بـ $f1(f1(S_1, S_2))$، وعن $f2(S_1, S_2)$ بـ $f2(f2(S_1, S_2))$ في المعادلات التفاضلية (6).

وبصورة عامة فان مصفوفة العزم الثالث للجيل n يتم حسابها بالتعويض عن $f1(S_1, S_2)$ بـ $f1(f^1_{n-1}(S_1, S_2))$، وعن $f2(S_1, S_2)$ بـ $f2(f^2_{n-1}(S_1, S_2))$ والجدول (1) يوضح قيم عناصر مصفوفات العزم الثالث للأجيال المختلفة ويلاحظ التطور السريع الذي يحدث بمجرد الوصول إلى الجيل الرابع حيث يؤشر بوضوح ما يمكن ان يحصل بالأجيال اللاحقة ومن الواضح في الشكل أعلاه ان العزم الثالث سيكون وفقا للدالة الأسية كلما اقتربت ρ من الواحد.

الجدول (1) : قيم العزم الثالث لغاية الجيل الرابع ولقيم مختلفة لـــ ρ.

الأجيال	قيمةρ			
	0.99	0.95	0.91	0.88
الأول	0.154	0.08	0.08	0.128
الثاني	1.911	1.242	1.168	1.168
الثالث	5.377	3.204	2.899	2.604
الرابع	10.528	5.823	5.01	4.018

وتوضح الرسوم البيانية في الشكل (1) لقيم العزم الثالث المبينة فـــي الجـــدول (1) تباعد هذه القيم. ويتضح من هذا العمل التجريبي انه عندما تكون قيمة ρ كبيرة جداً وتقتـــرب من الواحد فان قيمة العزم الثالث سوف تكون كبيرة ولا تحقق التقارب لقيمة محددة. وهنا لابد من الاشارة الى ان القيم المعتمدة في جدول رقم (1) هي القيم الممكنة والتي تحقق تقارب قيمة ρ من الواحد وبذلك فانه بالرغم من الاعتماد على حالة تجريبية الا ان النتائج يمكن ان يعول عليها كون تلك الحالة التجريبية تمثل جميع الحالات الممكنة.



الشكل (1) تباعد قيم العزم الثالث للعملية المتفرعة ثنائية الانشطار ولقيم مختلفة لـــ ρ

تقارب العمليات المتفرعة ثنائية الانشطار

سنبين في هذا الجزء ان غاية التوزيع الاحتمالي الشرطي لحجم المتسلسلة المعياري في الجيل n يقترب من التوزيع الاسي السالب بشرط تحقق الشرطين:

1- محدودية عزوم الدرجة الثانية.

2- ان الجذر المميز $\rho \to 1$.

ولتحقيق ذلك يجب ان نثبت ان لاية قيم مختارة لـ p^1, p^2 والتي تحقق شرط $\rho \to 1$ فانه عندما $n \to \infty$ فان

$$\frac{x'[1-f_n(I)]}{x'[1-f_n(0)]} \cdot \frac{1}{1+T'} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

حيث ان $\frac{x'[1-f_n(I)]}{x'[1-f_n(0)]}$ هي الدالة المولدة للاحتمالات لـ Z_n^* وان $\frac{1}{1+T'I}$ تمثل تحويل لابلاس للتوزيع الاسي السالب بمعلمة مساوية للواحد الصحيح.

وان المتجه $T=(t_1,t_2)$ الذي عناصره تقع ضمن الفترة $(0,\infty)$ وكذلك المتجه $I=(I_1,I_2)$ الذي يعرف بالشكل الاتي:

$$I_i = e^{t_i/\prod_n QV_i} \qquad ; (i=1,2)$$

حيث ان: [Holte, 1982]

$$Q(s)=\sum_{j=1}^{k} V_j q_j(s)$$

وسيتم اختبار قيم متعددة من الازواج (t_1,t_2) ويتم حساب I_i $(i=1,2)$ حيث تدخل القيم الناتجة لكل من I_1 و I_2 في ايجاد قيمة الطرف الاول (A) من المعادلة (2-3-1) حيث:

$$A_1=\frac{X'[f_n(I_i)-f_n(0)]}{X'[1-f_n(0)]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

يتم حساب $f_n(I_i)$ وذلك بالتعويض عن قيمة S في (5) بـ I_n أي ان:

$$\begin{aligned} f_n^1(I_1,I_2) = p_{00}^1 &+ p_{01}^1[f_{n-1}^2(I_1,I_2)] + p_{02}^1[f_{n-1}^2(I_1,I_2)]^2 + p_{10}^1[f_{n-1}^1(I_1,I_2)] + \\ & p_{11}^1[f_{n-1}^1(I_1,I_2)][f_{n-1}^2(I_1,I_2)] + p_{12}^1[f_{n-1}^1(I_1,I_2)][f_{n-1}^2(I_1,I_2)]^2 + \\ & + p_{20}^1[f_{n-1}^1(I_1,I_2)]^2 + p_{22}^1[f_{n-1}^1(I_1,I_2)]^2[f_{n-1}^2(I_1,I_2)]^2 \\ f_n^2(I_1,I_2) = p_{00}^2 &+ p_{01}^2[f_{n-1}^2(I_1,I_2)] + p_{02}^2[f_{n-1}^2(I_1,I_2)]^2 + p_{10}^2[f_{n-1}^1(I_1,I_2)] + \\ & p_{11}^2[f_{n-1}^1(I_1,I_2)][f_{n-1}^2(I_1,I_2)] + p_{12}^2[f_{n-1}^1(I_1,I_2)][f_{n-1}^2(I_1,I_2)]^2 + \\ & + p_{20}^2[f_{n-1}^1(I_1,I_2)]^2 + p_{22}^2[f_{n-1}^1(I_1,I_2)]^2[f_{n-1}^2(I_1,I_2)]^2 \end{aligned}$$

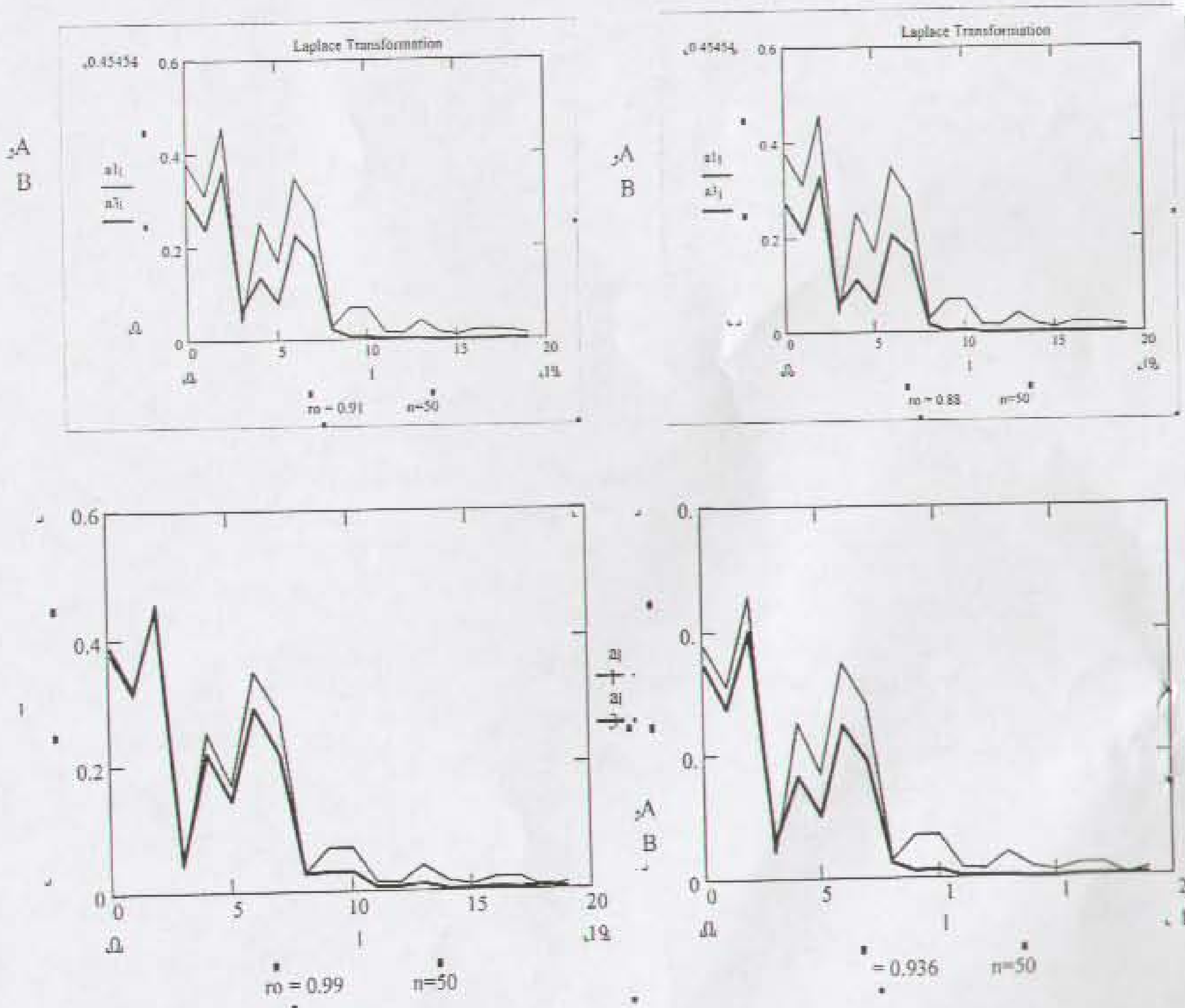
$$\ldots\ldots\ldots (9)$$

وكذلك يتم حساب الطرف الثاني (B) من المعادلة (7) ولنفس المتجه $T=(t_1,t_2)$ من تحويل لابلاس للتوزيع الاسي السالب بمعلمة مساوية للواحد الصحيح. الجدول (2) يبين قيم A, B لـ (20) زوج من (t_1,t_2) ولقيم مختلفة لـ ρ.

الجدول (2): قيم التوزيع الاسي السالب مع تحويل لابلاس بمعلمة مساوية للواحد ولقيم مختلفة لـ ρ ، n و T.

T		A	ρ							
t_1	t_2		0.88		0.91		0.936		0.99	
0.16	1.5	0.37594	n=50	n=200	n=50	n=200	n=50	n=200	N=50	N=200
0.22	2	0.31056	0.27322	0.27328	0.30412	0.37594	0.34362	0.34641	0.38781	0.40984
0.3	0.9	0.45454	0.20912	0.20911	0.23778	0.31056	0.27227	0.27496	0.31625	0.33869
0.7	22	0.04219	0.32600	0.32611	0.35779	0.45454	0.39522	0.39847	0.44735	0.47055
1	2	0.25	0.05661	0.05654	0.06406	0.04219	0.05976	0.05939	0.04539	0.04397
1	4	0.16667	0.10928	0.10940	0.13474	0.25	0.16134	0.16431	0.21715	0.24345
1.2	0.7	0.34483	0.06026	0.06046	0.07882	0.16667	0.09781	0.10012	0.14364	0.16616
2	0.6	0.27778	0.20225	0.20235	0.22412	0.34483	0.24162	0.24445	0.28846	0.31399
2	32	0.02857	0.16577	0.16565	0.17887	0.27778	0.18537	0.18716	0.21386	0.23692
6	8	0.06667	0.01532	0.01525	0.02158	0.02857	0.02358	0.02403	0.02785	0.02712
7	7	0.06667	0.00196	0.00194	0.00455	0.06667	0.00962	0.01034	0.03104	0.04664
10	54	0.01538	0.00258	0.00254	0.00542	0.06667	0.01100	0.01173	0.03003	0.04505
10	77	0.01136	0	0	0.00016	0.01538	0.00036	0.00047	0.00518	0.00838
11	14	0.03846	0	0	0.00015	0.01136	0.00036	0.00047	0.0051	0.00737
19	51	0.01409	0	0	0.00025	0.03846	0.00131	0.00148	0.0107	0.02067
23	99	0.00813	0	0	0	0.01409	0	0	0.00135	0.00427
31	20	0.01923	0	0	0	0.00813	0	0	0.00072	0.00239
33	22	0.01786	0	0	0	0.01923	0.00017	0.00020	0.00248	0.00624
44	12	0.01754	0	0	0	0.01786	0	0.00011	0.00196	0.00537
90	20	0.00911	0	0	0.00046	0.01754	0.00197	0.00212	0.00568	0.00780

ونلاحظ من الجدول (2) ان افضل تطابق يكون عندما تزداد قيمة ρ وتقترب من الواحد وكذلك بازدياد قيمة n، ومن اختبار الفروقات بين قيم A (القيمة المشاهدة) و قيم B (القيم المتوقعة) والموضحة في الجدول (2) باستخدام اختبار χ^2، وجد بانه عندما ρ وتقترب من الواحد وكذلك بازدياد قيمة n هناك تطابق للقيم المتوقعة مع القيم المشاهدة والشكل (2) يوضح مدى التطابق لتحويل لابلاس عند تغيير قيمة ρ . أي ان تحويل لابلاس لكلا التوزيعين متساوي وبالتالي يمكن القول بان توزيع حجم العملية المتفرعة متعددة الانواع يقترب من التوزيع الاسي السالب عند تقترب قيمة ρ من الواحد.



الشكل (2) : التقارب بين قيم A و B لقيم مختلفة لـــ n و ρ.

المصادر

1. البكر ، بسام يونس (1996) . المتسلسلات المتفرعة المتعددة الأنواع في حالة كثافة التكاثر وعدم الاستقلالية . رسالة دكتوراه غير منشورة مقدمة إلى كلية الإدارة والاقتصاد جامعة الموصل .

2. Chanvin, B. (1998). Trees and Branching Processes, http://www.Research index.

3. Ciampi, A.; Kates, L; Buick, R.; Kriukov, Y; and Till J. E. (1985). Multi-type Galton-Watson process as a model for proliferating human-tumour cell populations derived from stem cells: estimation of stem cell self-renewal probabilities in human ovarian carcinomas, cell tissue kinet. Vol. (19):129-140.

4. Fahady, K. S. (1969). Heavy Traffic Approximations in Queueing Theory and Branching Process. MSc. Thesis, Manchester University, England.

5. Fahady, K. S. ; Quine, M.P & Vere- Jones, D. (1971) Heavy Traffic Approximations for the Galton-Watson Process. Adv. AppL Prob., 3: 282-300.

6. Fahady, , K. S. (1972) . Some Problems to Scheduled Arrival Queues and to the use of Heavy Traffic Approximations Ph.D. Thesis, Hull University, England.

7. Fearn, D.H. (1971). Galton-Watson Processes with Generation Dependence, Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 4: 159-172.

8. Goldstein M. I. and Hoppe F. M. (1978). Critical Multitype Branching Processes with Infinite Variance, J. of Mathematical Analysis and Applications 65(2): 675-686.

9. Hoppe,, F.M. (1976). Supercritical Multitype branching processes, Annals. of probability, Vol. 4, No.3, 393-401.

10. Holte J. M. (1982). Critical Multitype Branching Processes, The Annals of Probability, Vol. 10, No, 2, 482-495.

11. Karlin S. and McGregor J. (1966). Spectral Theory of Branching Processes, Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Ge.5, 6-33.

12. Kesten, H. and Stigum, B. P. (1966A). A Limit Theorem for Multidimensional Galton-Watson Processes. J. of Mathematical Statistics, 37, 1211-1223.

13. Kesten H. and Stigum B. P. (1966B). Additional Limit Theorem for Indecomposable Multi-Dimensional Galton-Watson Processes, Annal. Math. Statistic. 37, 1463-1481.

14. Klebaner F. C. (1993). Population-Dependent Branching Processes with A Threshold, Stoch Proc. Appl. 46, 115-127.

15. Mode, C. J. (1971). Multitype Age-Dependent Branching Processes and Cell Cycle Analysis, Mathematical Biosciences10, 177-190.

16. Quine, M.P. (1 972). The Multitype Galton-Watson Process with p near 1, Adv. Appl. Prob., 4: 429-452.